Ministerul Educaţiei şi Cercetării

Olimpiada Naţională de Matematică 2007

Etapa finală, Piteşti

11 aprilie 2007

CLASA A X-A, SOLUŢII ŞI BAREMURI

Subiectul 1. Demonstraţi că ecuaţia $z^n+z+1=0$ are o soluţie complexă de modul 1 dacă şi numai dacă restul împărţirii lui n la 3 este 2.

Soluţie Dacă $n = 3k+2, k \in \mathbb{N}$ atunci avem ca soluţie de modul 1 numărul complex $\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)$ .... 2 puncte

Reciproc, dacă avem o soluţie de forma $\cos a + i \sin a$, $a \in [0, 2\pi)$, atunci $\sin na + \sin a = 0$ şi $\cos na + \cos a + 1 = 0$. Din prima egalitate rezultă $na = 2k\pi - a$ sau $na = 2k\pi + \pi + a$, $k \in \mathbb{N}$ .... 1 punct

În primul caz avem $\cos na = \cos a$, deci $\cos a = -\frac{1}{2}$, adică $a = \frac{2\pi}{3}$ sau $a = \frac{4\pi}{3}$. Pentru $a = \frac{2\pi}{3}$ obţinem $\sin(2n\pi/3) + \sqrt{3}/2 = 0$, ceea ce este valabil doar pentru $n = 3k+2$. Pentru $a = \frac{4\pi}{3}$ apare condiţia $\sin(4n\pi/3) - \sqrt{3}/2 = 0$, ceea ce este valabil, de asemenea, doar pentru $n = 3k+2$.......... 3 puncte

În al doilea caz avem $\cos na = -\cos a$, deci acest caz este imposibil.... 1 punct

Altă soluţie pentru reciprocă. Dacă z este o soluţie de modul 1, atunci avem şi soluţia $1/z$, deci $z^n + z + 1 = 0 = z^n + z^{n-1} + 1$. Rezultă succesiv $z^{n-2} = 1$, $z^2 + z + 1 = 0$, $z^3 = 1$ şi $z \neq 1$, $n - 2 = 3k$, $k \in \mathbb{N}$.

Subiectul 2. Rezolvaţi ecuaţia $2^{x^2+x} + \log_2 x = 2^{x+1}$.

Soluţie. Avem $x \in (0, \infty)$ .... 1 punct

Adunăm în ambii membri $\log_2(x+1)$.......................... 3 puncte

Funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x + \log_2 x$ este strict crescătoare ca sumă de două funcţii strict crescătoare. Egalitatea din ecuaţie devine $f(x^2+x) = f(x)$, prin urmare $x^2 + x = x + 1$ ce implică $x = 1 \in (0, \infty)$....... 3 puncte

Subiectul 3. Pentru ce numere naturale n, $n \geq 2$, numărul $a_n = (n-1)^{n^{n+1}} + (n+1)^{n^{n-1}}$ este divizibil cu n^n?

Soluţie. Arătăm că $a_n = (n-1)^{n^{n+1}} + (n+1)^{n^{n-1}}$ este divizibil cu n^n, pentru n impar. .... 1 punct

Avem

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} n^k \binom{n^{n+1}}{k} + \sum_{k=1}^{n-1} n^k \binom{n^{n-1}}{k} + \mathcal{M} n^n.$$

.... 1 punct

Să arătăm că fiecare termen al sumelor de mai sus este divizibil cu n^n. Pentru aceasta observăm că dacă p este un număr prim care apare în n cu exponentul $r \geq 1$ atunci $p \geq 3$ şi $n^k \binom{n^{n-1}}{k}$ îl conţine pe p la puterea cel puţin

$$\begin{aligned} kr + (n-1)r - \left\lfloor \frac{k}{p} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{k}{p^3} \right\rfloor - \ldots &\geq nr + (k-1)r - \frac{k}{p-1} \\ &\geq nr + (k-1) - \frac{k}{2} \\ &\geq nr \end{aligned}$$

pentru $k \geq 2$, iar în cazul $k = 1$, $n\binom{n^{n-1}}{1} = n^n$.

Pentru termenii primei sume raţionăm analog (în acest caz nu mai este necesară analizarea separată a cazului $k = 1$). .... 4 puncte

Pentru n par se observă uşor că a_n este multiplu de n plus 2, iar pentru $n = 2$ $a_2 = 10$ deci nedivizibil cu $n^2 = 4$. .... 1 punct

Subiectul 4. a) Pentru o mulţime finită de numere naturale S se notează cu $S+S$ mulţimea tuturor sumelor $x+y$ cu $x, y \in S$. Fie $m = |S|$, cardinalul lui S. Arătaţi că

$$|S+S| \leq \frac{m(m+1)}{2}.$$

b) Fie m un număr întreg strict pozitiv. Notăm cu $C(m)$ cel mai mare număr întreg $k \geq 1$, pentru care există o mulţime S, formată din exact m numere întregi, astfel încât $\{1, \cdots, k\} \subseteq S \cup (S+S)$. De exemplu, $C(3) = 8$, cu $S = \{1, 3, 4\}$. Arătaţi că

$$\frac{1}{4} m(m+6) \leq C(m) \leq \frac{1}{2} m(m+3).$$

Soluţie. a) Dacă S este o mulţime finită de numere, atunci

$$|S+S| \leq |S| + \binom{|S|}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$

.... 1 punct

b) Pentru inegalitatea de majorare, avem conform a)

$$|S \cup (S+S)| \leq 2|S| + \binom{|S|}{2}.$$

.... 1 punct

Pentru $|S| = m$, rezultă că $S \cup (S+S)$ are cel mult $m(m+3)/2$ elemente, deci $C(m) \leq m(m+3)/2$. .... 1 punct

În continuare stabilim o margine inferioară. Luăm $S = \{1, 2, \ldots, x\} \cup \{(k+1)x + k \mid k = 1, 2, \ldots, m-x\}$, cu $0 < x < m$, deci $|S| = m$. ... 1 punct

Se arată uşor că $\{1, 2, \ldots, (m-x+1)x + m - x + x\} \subset S \cup (S+S)$. 1 punct

Dar valoarea maximă a mulţimii elementelor de mai sus care este $-x^2 + (m+1)x + m$, se obţine când $x = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ şi este deci cel mai mic întreg mai mare sau egal cu $\frac{m^2+6m}{4}$, adică $\frac{m(m+6)}{4} \leq C(m)$. .... 2 puncte